

Afgeleiden en integralen

Welkom bij de online les afgeleiden en integralen. We beginnen om 9:00 u. stipt met de les.

Enkele praktische zaken:

- Om het systeem niet te overbelasten graag je microfoon en camera uitzetten.
- Deze les zal worden opgenomen, maar laat dit je niet afschrikken om een vraag te stellen.
- Vragen kan je best in de chatruimte zetten. Aan het einde van de les krijg je ook de mogelijkheid om mondeling vragen te stellen.
- Hou je smartphone alvast bij de hand voor een mentimeter.

Afspraken dOLOD afgeleiden en integralen

Organisatie lessen:

- Online lessenreeks (planning zie google agenda BLC1)
- Alles staat in de cursus maar vaak veel te moeilijk, daarom deze aanvullende presentatie. Jullie krijgen op het einde van de reeks een goed overzicht wat je wel en niet moet kennen.
- Op het einde van de les zal ook de gelegenheid geboden worden tot vragen
- Permanentie (zie agenda BLC)

Oefeningen:

- Oefeningen en theorie lopen door elkaar.
- Voorbeeldoefeningen samen in de les + zelfstandig verwerken van opgaven.
- Discussieforum voor de oefeningen (Vaak sneller antwoord dan per mail!!)

Afspraken dOLOD afgeleiden en integralen

Studiemateriaal

- Cursus zal online (op papier) aangekocht kunnen worden?
- Canvas
 - Cursus online (incl oefeningen en formularium)
 - Module veel gestelde vragen!
 - Opnames van de lessen
 - Aanvullende (deze) presentatie
- Gebruik van grafisch rekenmachine (GRM): TI-84 plus

Afspraken dOLOD afgeleiden en integralen

- Examen samen met statistiek (zie aankondiging Canvas)
- Uitgebreid formularium (zie achteraan cursus)
- Nadruk op kunnen toepassen van theorie → examen = groot deel oefeningen
- Oefeningen zijn gelijkaardig aan die behandeld in de les
- Puntenverdeling van de vragen ongeveer volgens lestijd
- RM TI84 Plus mag / moet gebruikt worden

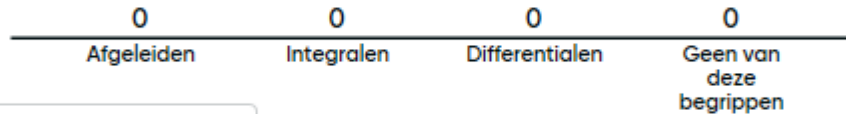
Afspraken dOLOD afgeleiden en integralen

- *Wiskunde BLC 1* is een sOLOD (samengesteld OpLeidingsOnderDeel) van 5 studiepunten en bestaat uit drie deelopleidingsonderdelen (dOLODs):
 - *Functies BLC 1* 3 studiepunten - gewicht 2,5
 - *Statistiek BLC 1* 2 studiepunten - gewicht 2,5
 - *Afgeleiden en integralen BLC 1* 1 studiepunt - gewicht 1,0

Afgeleiden – Wat ben ik er mee?

Go to www.menti.com and use the code **14 12 14**

In mijn vooropleiding zag ik reeds



Slide is not active

Activate

0

Afgeleiden – Wat ben ik er mee?

We beginnen met een voorbeeld van een toepassing van afgeleiden....

In een labo wordt een bacterie opgekweekt. Regelmatig wordt het aantal bacteriën geteld.

Van deze tellingen wordt er een grafiek opgemaakt die het aantal bacteriën weergeeft in functie van de tijd.

Uit onderzoek blijkt dat deze functie goed benaderd wordt door de formule:

$$P(t) = 10000 \cdot (1 + t^2)$$

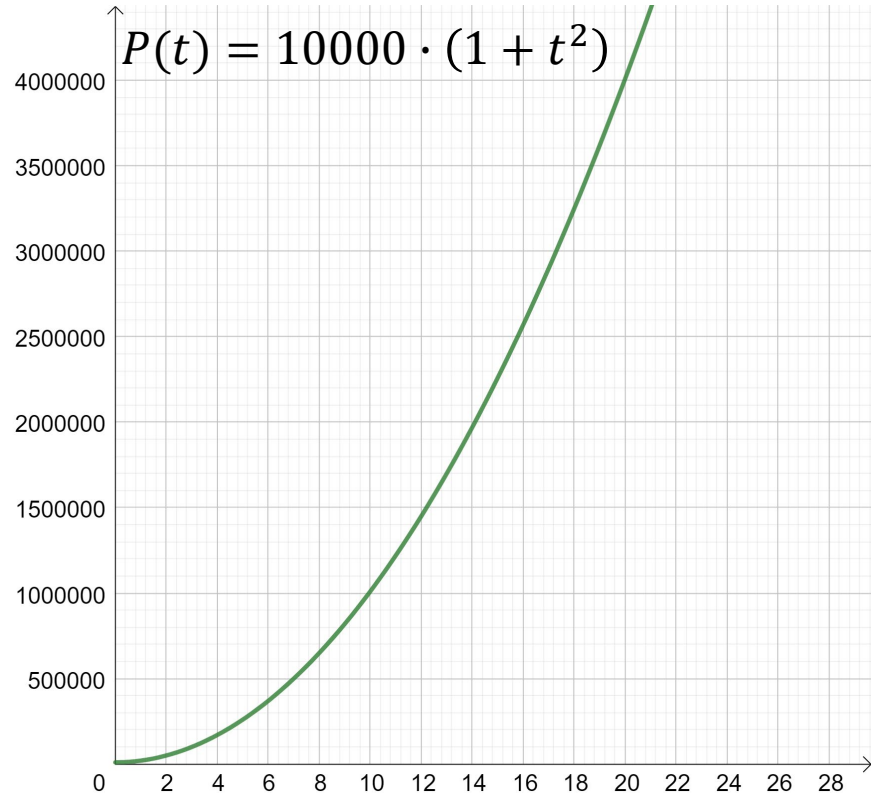
Met $P(t)$ de populatiegrootte of het aantal bacteriën op tijdstip t

Afgeleiden – Wat ben ik er mee?

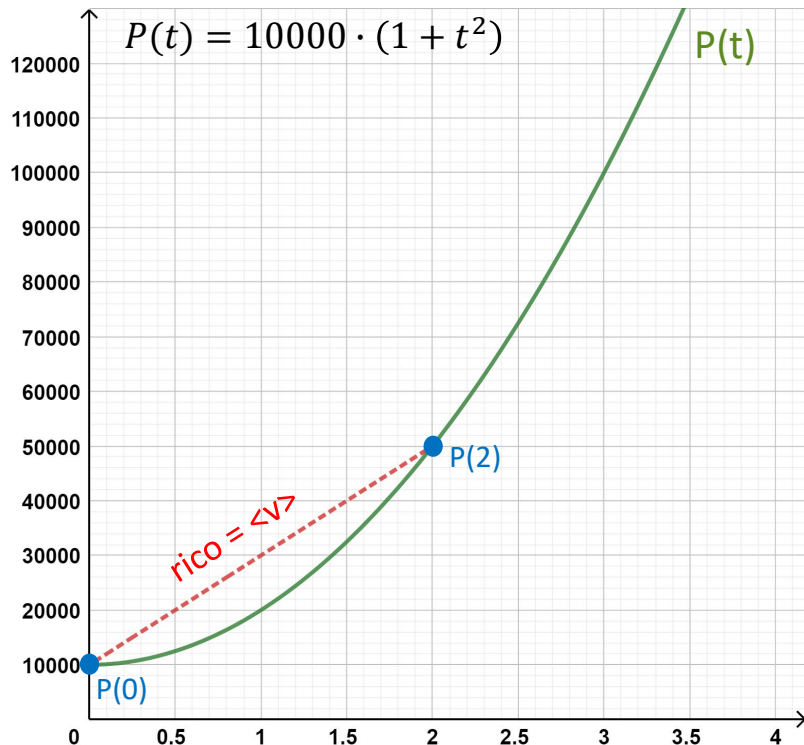
Kunnen we uit deze grafiek iets te weten komen over:

- de gemiddelde groeisnelheid van deze bacteriën na 2 uren in de incubator (dus in het interval $t=[0,2]$)
- de ogenblikkelijke groeisnelheid van deze bacteriën na 2 uren (dus op het tijdstip $t=2$)

(cfr. mechanica voor snelheid, gemiddelde snelheid,... en cursus pg 13 e.v.)



Afgeleiden – Wat ben ik er mee?



Wat is de gem. groeisnelheid in het interval $t=0$; $t=2$

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{P(2) - P(0)}{t_2 - t_0}$$

$$P(2) = 10000 \cdot (1 + 2^2)$$

$$\langle v \rangle = \frac{50000 - 10000}{2 - 0}$$

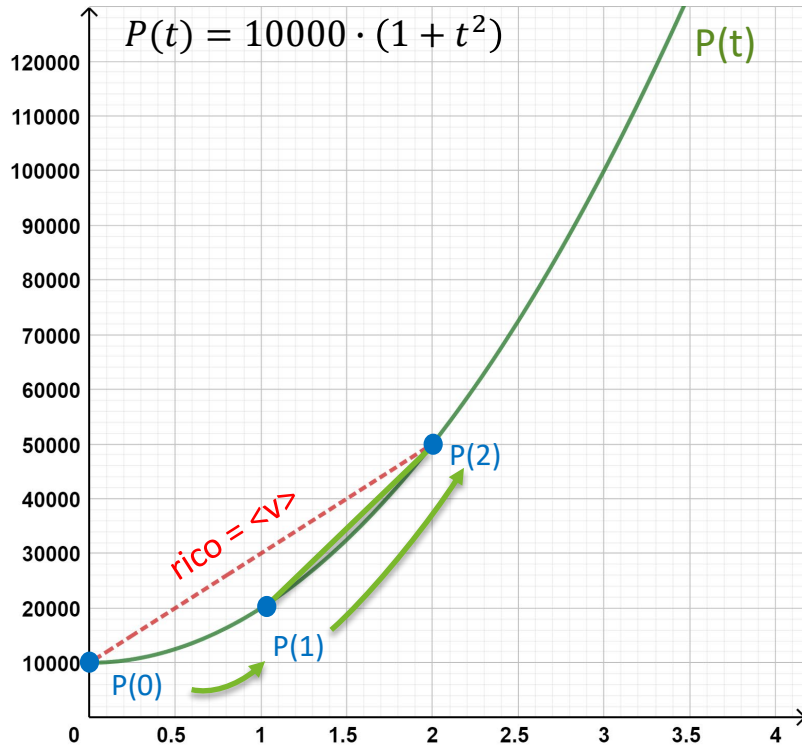
$$\langle v \rangle = 20000 \text{ bacterien/uur}$$

In het interval $t=0$; $t=2$ kwamen er gemiddeld 20000 bacteriën per uur bij.

Let op! In het interval $t=0$; $t=1$ was de toename minder groot
In het interval $t=1$; $t=2$ was deze groter.

$\langle v \rangle$ is de richtingscoëfficiënt van de rechte tussen $P(0)$ en $P(2)$

Afgeleiden – Wat ben ik er mee?

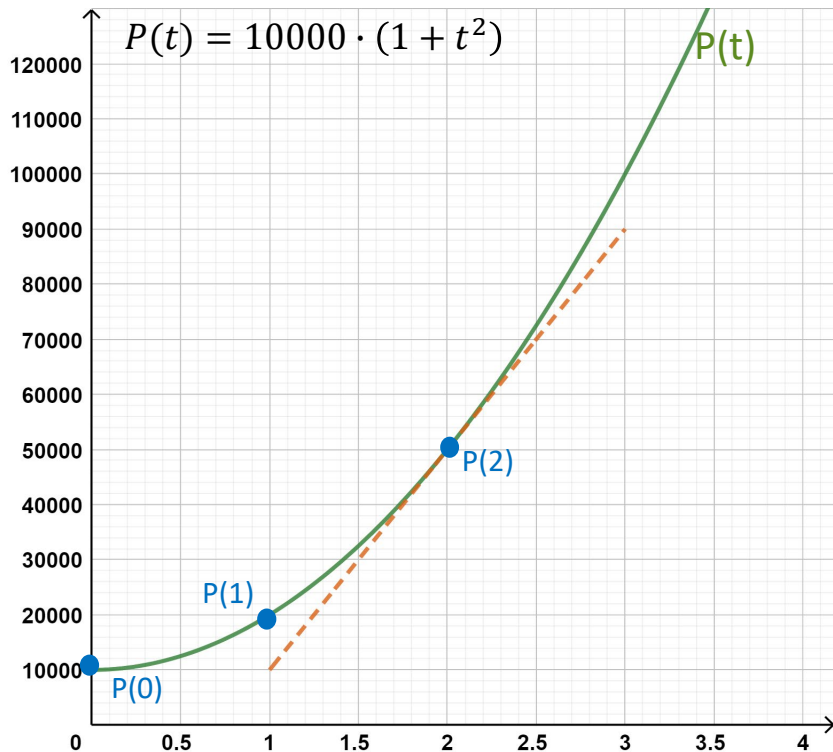


Nu zouden we graag de groeisnelheid kennen op het tijdstip $t=2$

We kunnen deze benaderen door het interval waarin we de gemiddelde snelheid berekenen als maar kleiner te maken.

Met andere woorden, we schuiven het punt $P(0)$ langsheen de groene grafiek op richting $P(2)$

Afgeleiden – Wat ben ik er mee?



Op den duur zal het punt dat we naar boven schuiven zo dicht naar $P(2)$ genaderd zijn dat het bovenop $P(2)$ ligt.

De rechte die daar doorloopt is de raaklijn aan $P(t)$.

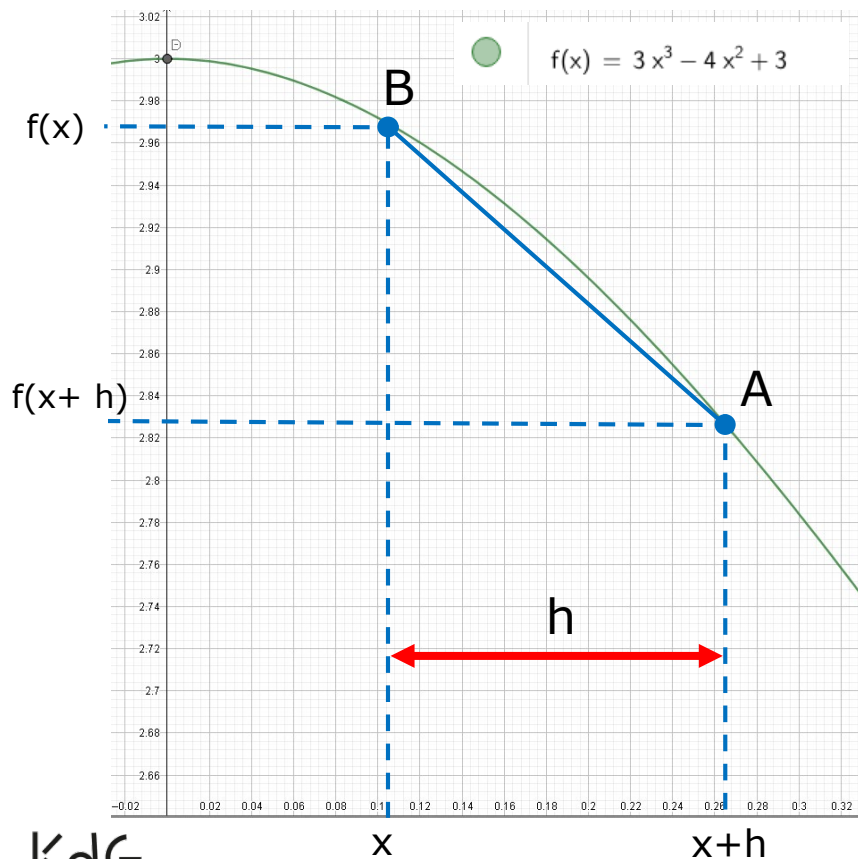
Deze raaklijn heeft met $P(t)$ slechts één punt gemeen.

De richtingscoëfficiënt van deze raaklijn is de ogenblikkelijke groeisnelheid op $t=2$

Hoe kunnen we de rico van deze rechte nu berekenen?

- Grafisch => zeer onnauwkeurig
- Wiskundig => via de afgeleide van $P(t)$

Afgeleiden – Wat is een afgeleide van een functie?



Hoe zit dat 'naderen van 2 punten' nu wiskundig?

Stel we vertrekken van een rechte door punten A en B en we willen de afgeleide in punt B kennen

Coördinaten punt A: $(x+h ; f(x+h))$

Coördinaten punt B: $(x ; f(x))$

De richtingscoëfficiënt zou dan zijn: $a = \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x}$

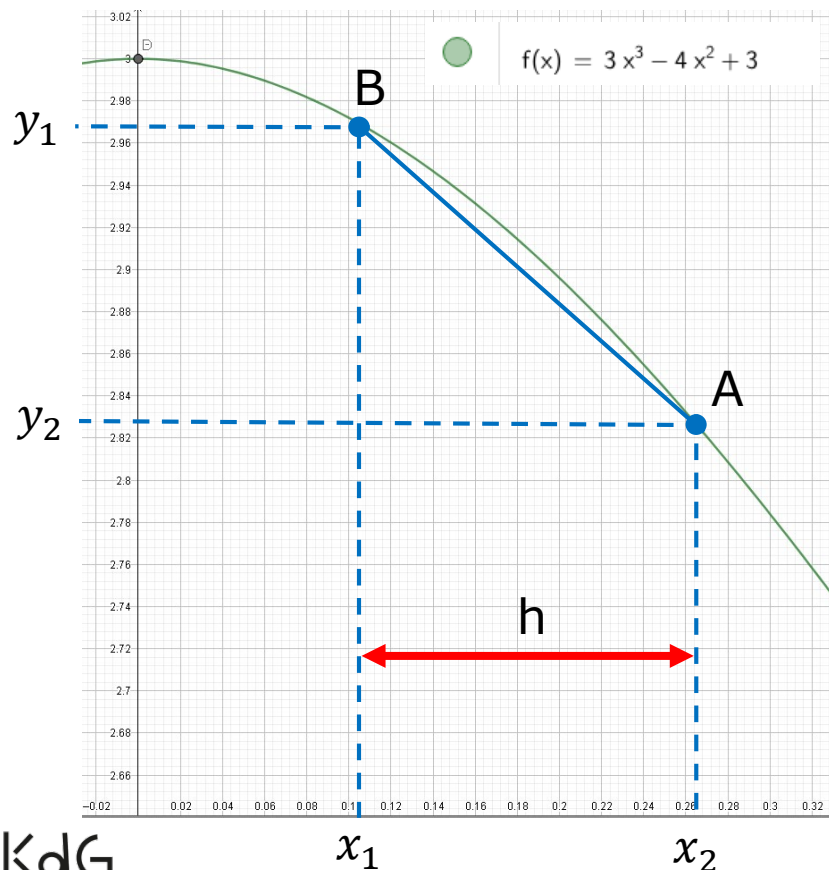
Wanneer we nu het punt A oneindig dicht laten komen bij punt B dan zal de blauwe rechte op den duur de Raaklijn worden in het punt B

Punt A oneindig dicht brengen naar punt B betekent dat h naar 0 zal naderen. $h \rightarrow 0$

In wiskundige symbolen schrijven we:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x}$$

Afgeleiden – Wat is een afgeleide van een functie?



$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x} = \lim_{x_2 \rightarrow x_1} \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

Anders geschreven: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Notatie van de afgeleide:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x} &= Df(x) = f'(x) = y' = Dy = \frac{df(x)}{dx} \\ &= \left(\frac{df}{dx}\right)_{x_1} = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x_1} \end{aligned}$$

Meest gebruikte notatie: $= f'(x) = y'$

Afgeleiden – Wat is een afgeleide van een functie?

Nemen we nu een heel eenvoudige functie nl. de parabool:

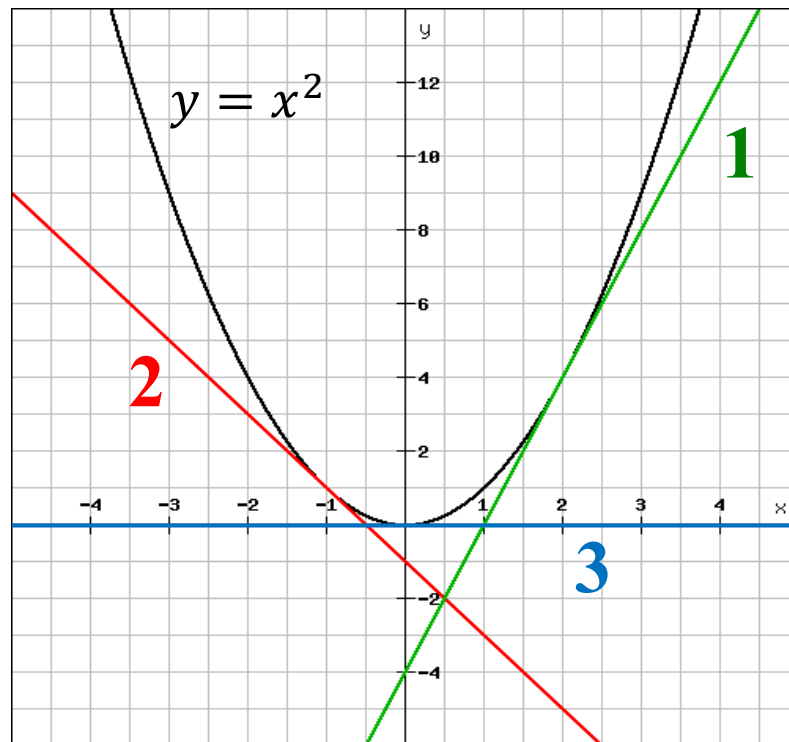
$$y = x^2$$

Je kan in willekeurig punt op die parabool een raaklijn tekenen

1: Raaklijn in punt $P_1(2,4)$

2: Raaklijn in punt $P_2(-1,1)$

3: Raaklijn in punt $P_3(0,0)$



Afgeleiden – Wat is een afgeleide van een functie?

Punt $P_1(2,4)$ rico raaklijn = +4

Merk op: $2 \cdot x = 2 \cdot 2 = 4$

Punt $P_2(-1,1)$: rico raaklijn = -2

Merk op: $2 \cdot x = 2 \cdot (-1) = -2$

Punt $P_3(0,0)$: rico raaklijn = 0

Merk op: $2 \cdot x = 2 \cdot 0 = 0$

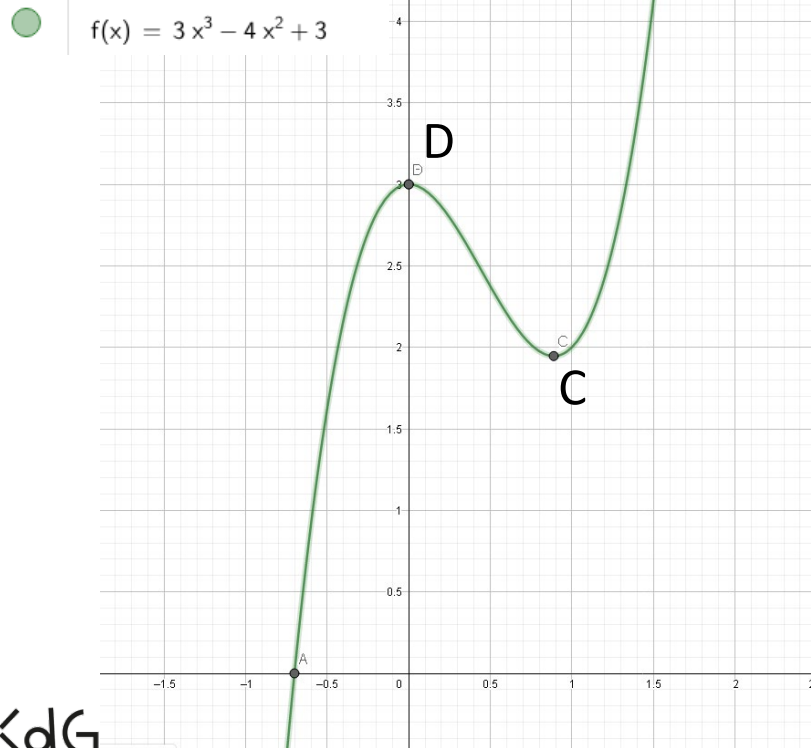
...

- In het algemeen blijkt: de rico van de raaklijn aan de grafiek in punt $P(x,y)$ is $2x$
 - De **afgeleide functie** van de functie $f(x) = x^2$ is $y = 2x$.
 - De **afgeleide** van de functie $f(x) = x^2$ in $x = 2$ is 4.
- De **afgeleide** van een functie in een punt = de waarde van de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek van die functie in dat punt.
- De **afgeleide functie** geeft voor elke x-waarde de afgeleide in dat punt.

Afgeleiden – Wat is een afgeleide van een functie?

Go to www.menti.com and use the code 14 12 14

Keren we nu terug naar ons eerder voorbeeld:



Welke waarde zal de afgeleide hebben in de punten C en D

0	0	0
1	0	Weet ik niet

Show correct answer



Slide is not active

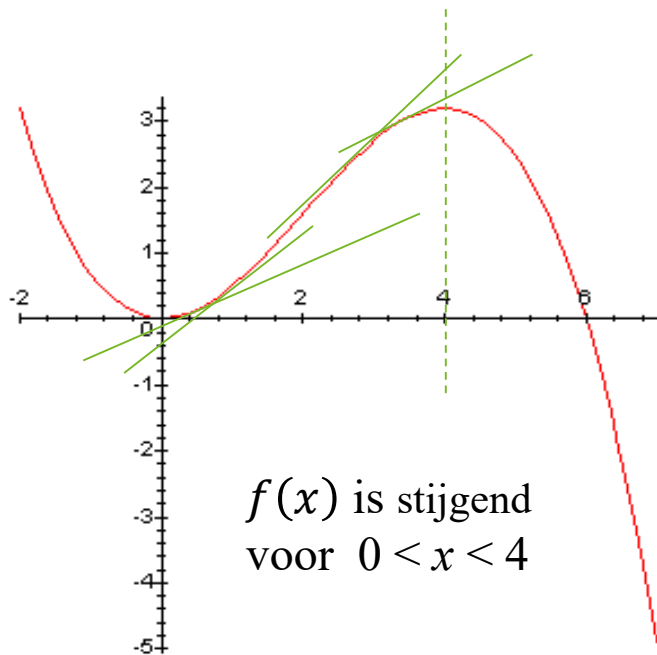
Activate



0

16

Afgeleiden – Betekenis van een afgeleide



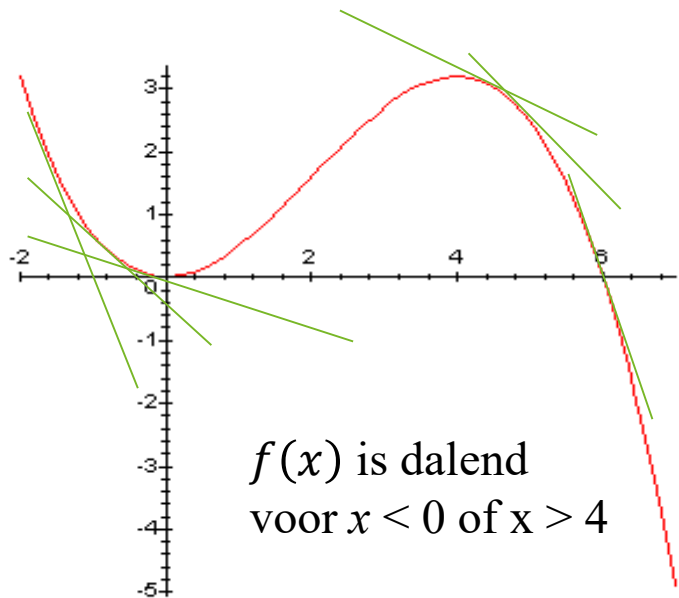
$f(x)$ is stijgend
voor $0 < x < 4$

**Afgeleide = maat voor verandering = maat voor
'afhankelijkheid' van x**

Afgeleide > 0 $\rightarrow$ raaklijn = stijgende rechte
 $\rightarrow$ functie is stijgend

Dus: positieve verandering (toename). Als x toeneemt,
dan neemt y ook toe.

Afgeleiden – Betekenis van een afgeleide



$f(x)$ is dalend
voor $x < 0$ of $x > 4$

**Afgeleide = maat voor verandering = maat voor
'afhankelijkheid' van x**

Afgeleide < 0 $\rightarrow$ raaklijn = dalende rechte
 $\rightarrow$ functie is dalend

Dus: negatieve verandering (afname). Als x toeneemt, dan neemt y af.

Afgeleiden – Betekenis van een afgeleide

**Afgeleide = maat voor verandering = maat voor
‘afhankelijkheid’ van x**

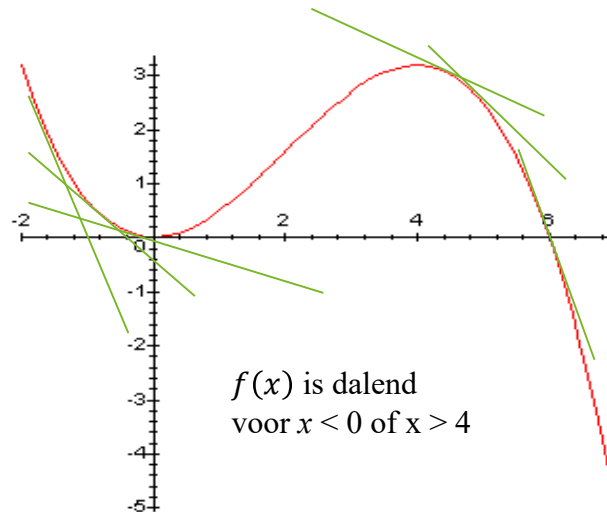
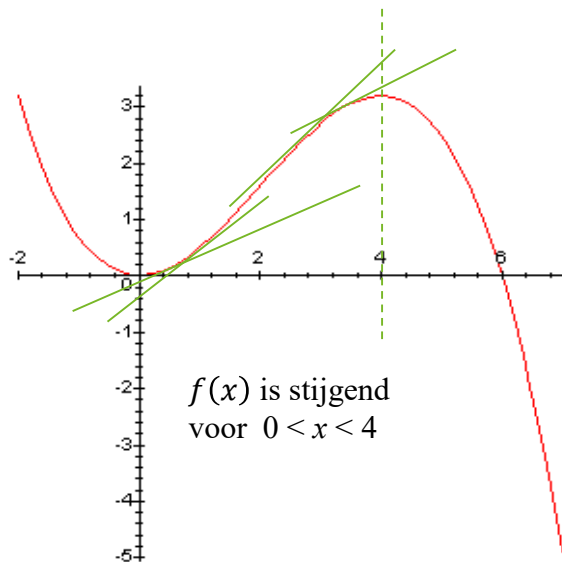
Afgeleide = 0 → raaklijn = horizontale rechte
 → minimum, maximum of
 zadelpunt

Dus: geen verandering. Als x toeneemt, verandert y niet.

Zie voorbeeld slide 16

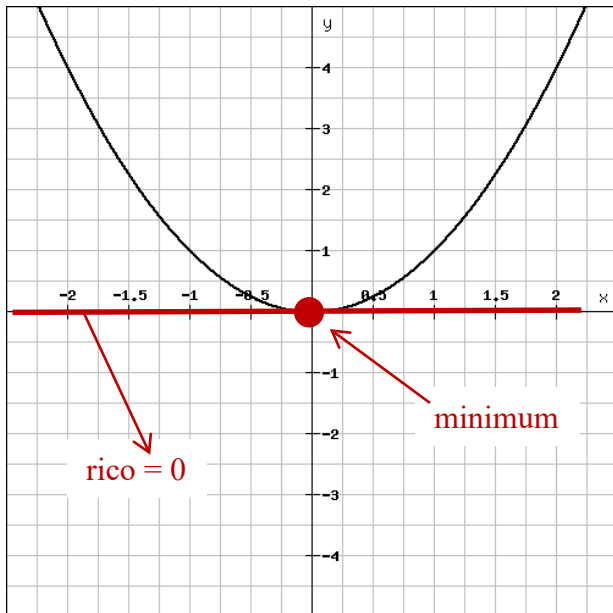
Afgeleiden – Betekenis van een afgeleide

- Meer wiskundig verwoord:
 - $f'(x_1) > 0 \Rightarrow f(x)$ is stijgend in x_1
 - $f'(x_1) < 0 \Rightarrow f(x)$ is dalend in x_1
 - Voorbeeld: $f(x) = -0,1x^3 + 0,6x^2$



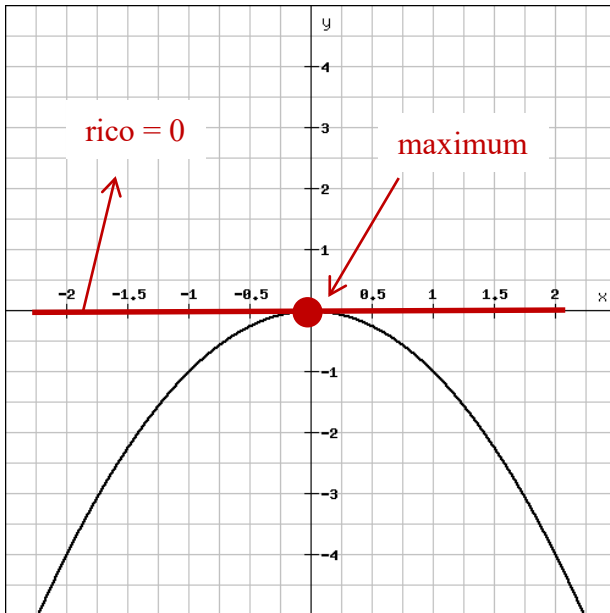
Afgeleiden – Betekenis van een afgeleide

1) $f(x) = x^2$



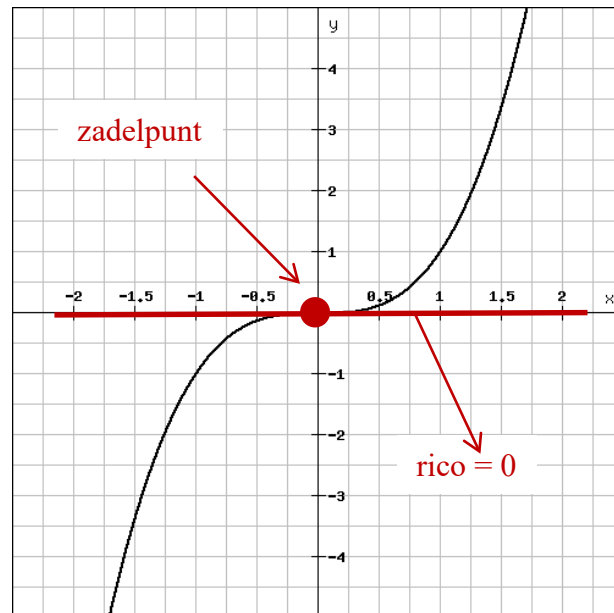
x		0	
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘	min	↗

2) $f(x) = -x^2$



x		0	
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↗	max	↘

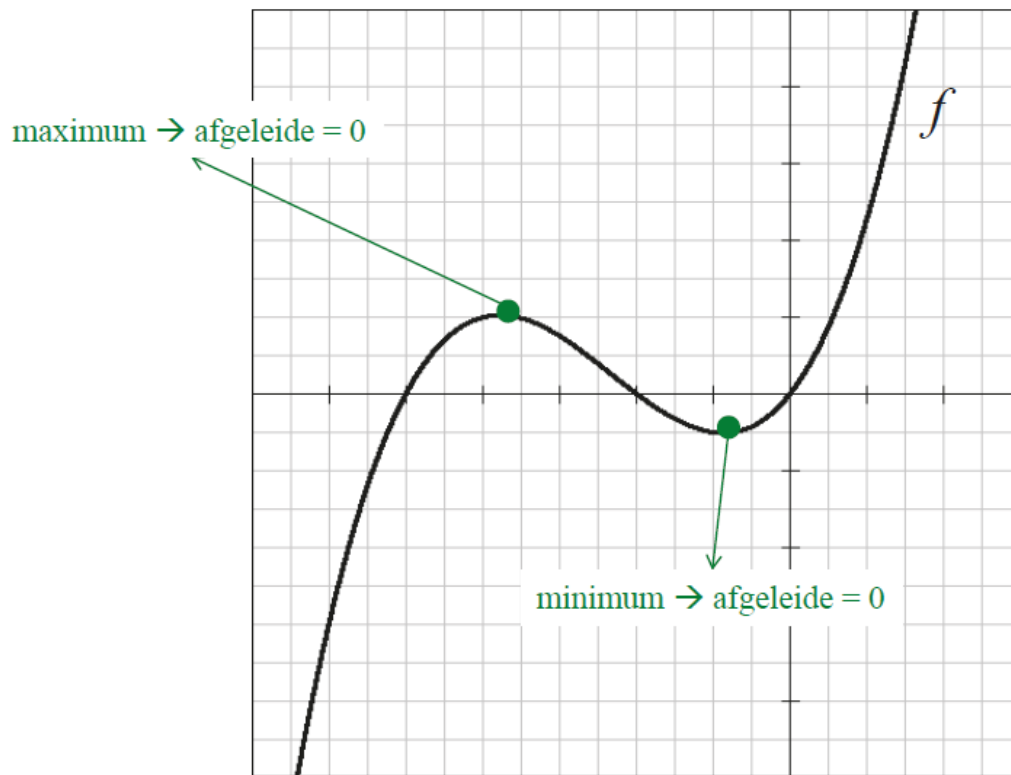
3) $f(x) = x^3$



x		0	
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	↗	zadelpunt	↗

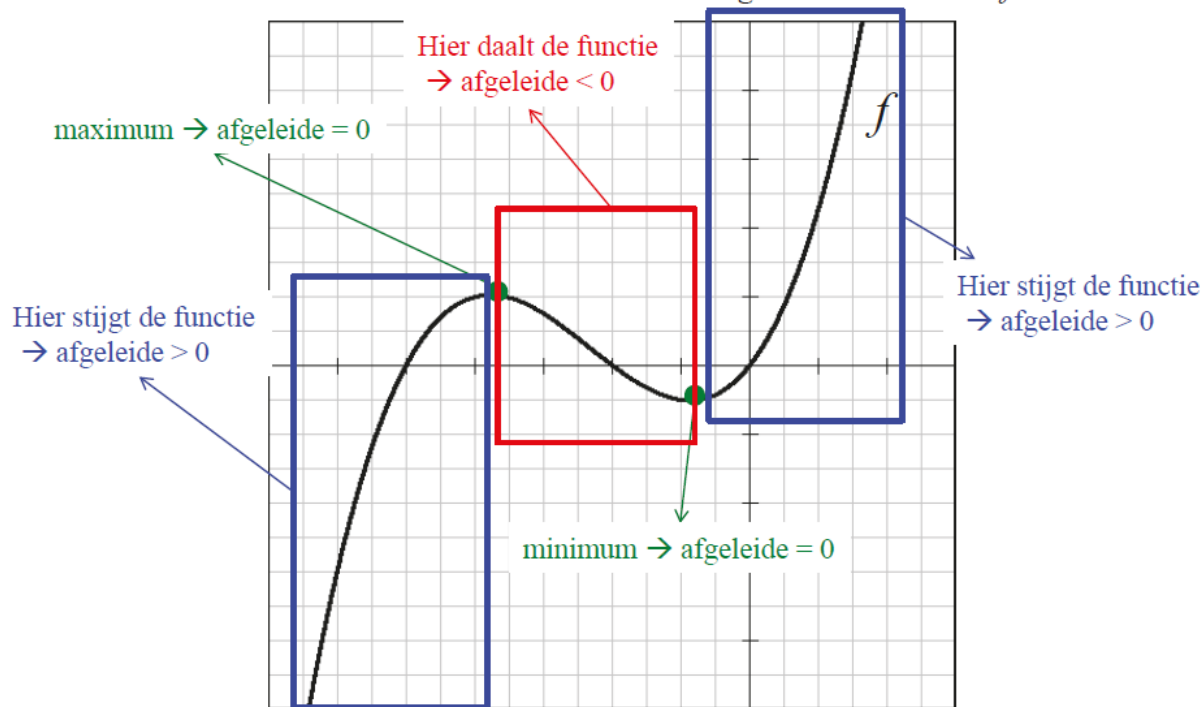
Afgeleiden – Voorbeeld

Maak een kwalitatief correcte schets van de afgeleide functie van f .



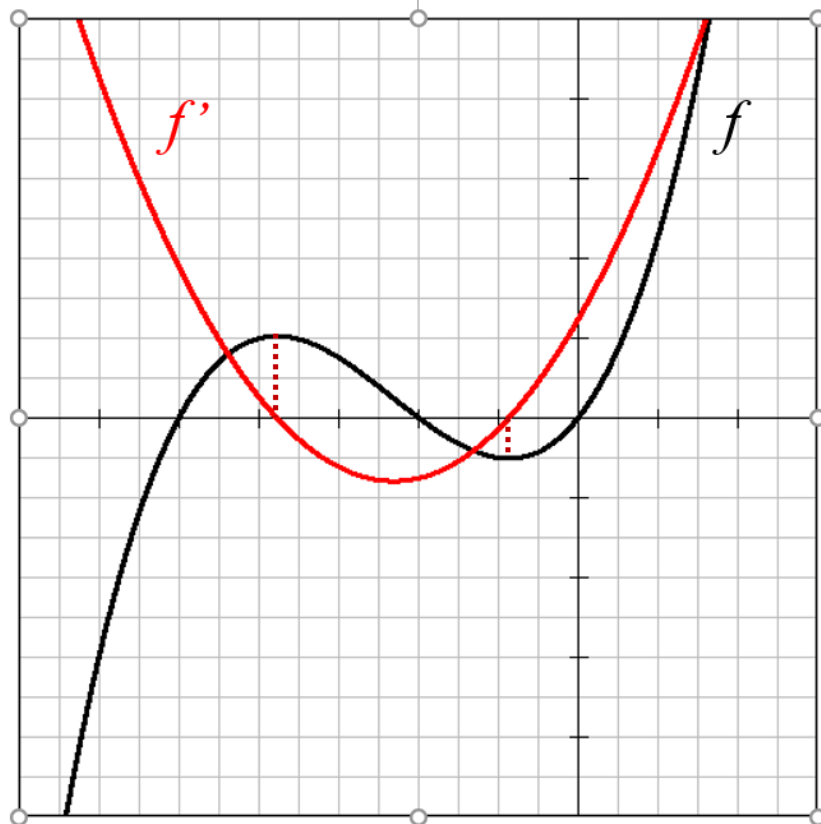
Afgeleiden – Voorbeeld

Maak een kwalitatief correcte schets van de afgeleide functie van f .



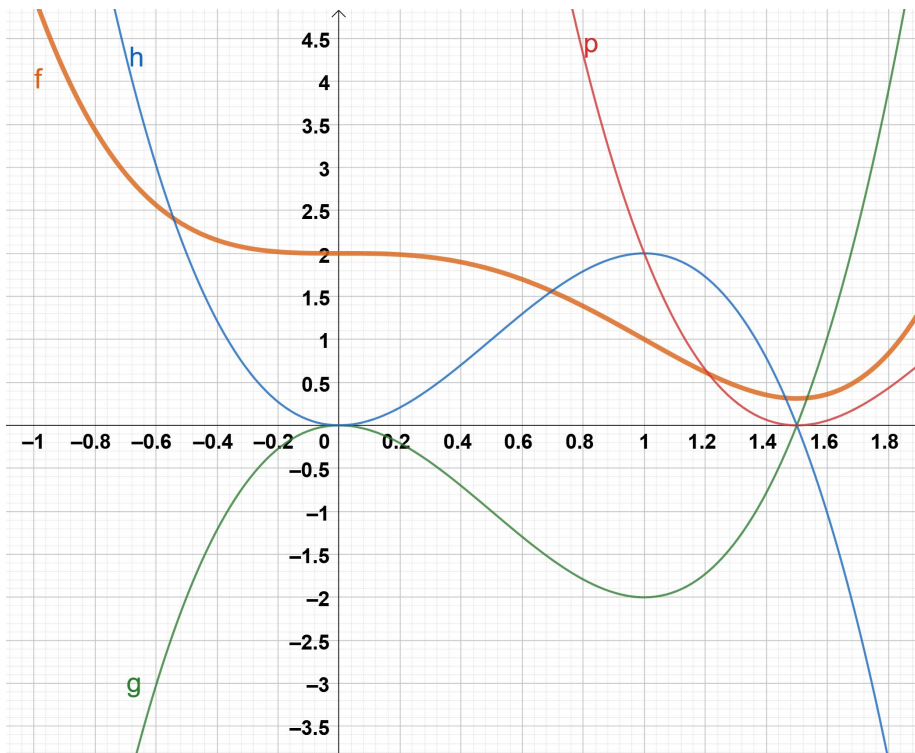
Afgeleiden – Voorbeeld

Maak een kwalitatief correcte schets van de afgeleide functie van f .



Afgeleiden – Voorbeeld

Go to www.menti.com and use the code 14 12 14



Als f de oorspronkelijke functie is, welke functie is dan de afgeleide van f ?

0	0	0	0
g	h	p	Weet ik niet

Show correct answer



Slide is not active

Activate

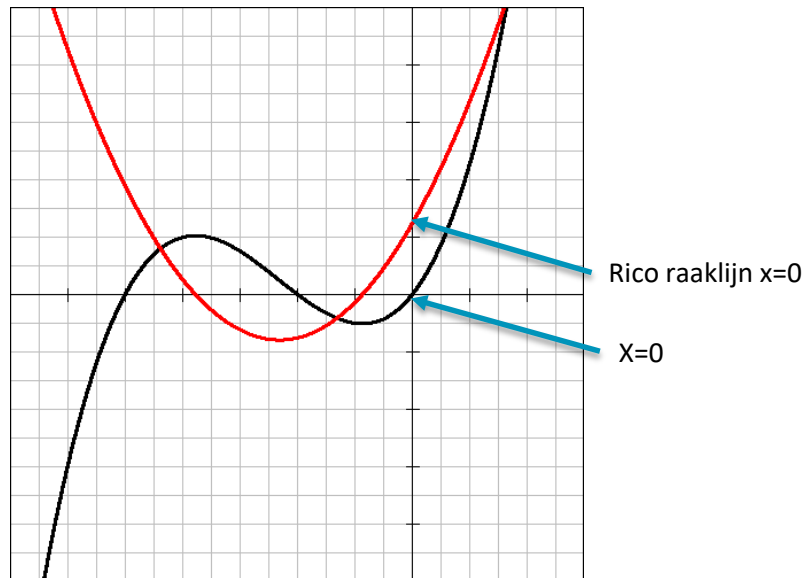
0

Afgeleiden – Afgeleiden van basisfuncties

Als we het functievoorschrift van een grafiek kennen, hoe kunnen we dan de afgeleide berekenen?

Met andere woorden, hoe vinden we de grafiek die voor elke x van de functie, die richting van de raaklijn in dat punt x weergeeft?

Rekenregels! (zie ook formularium!!!)

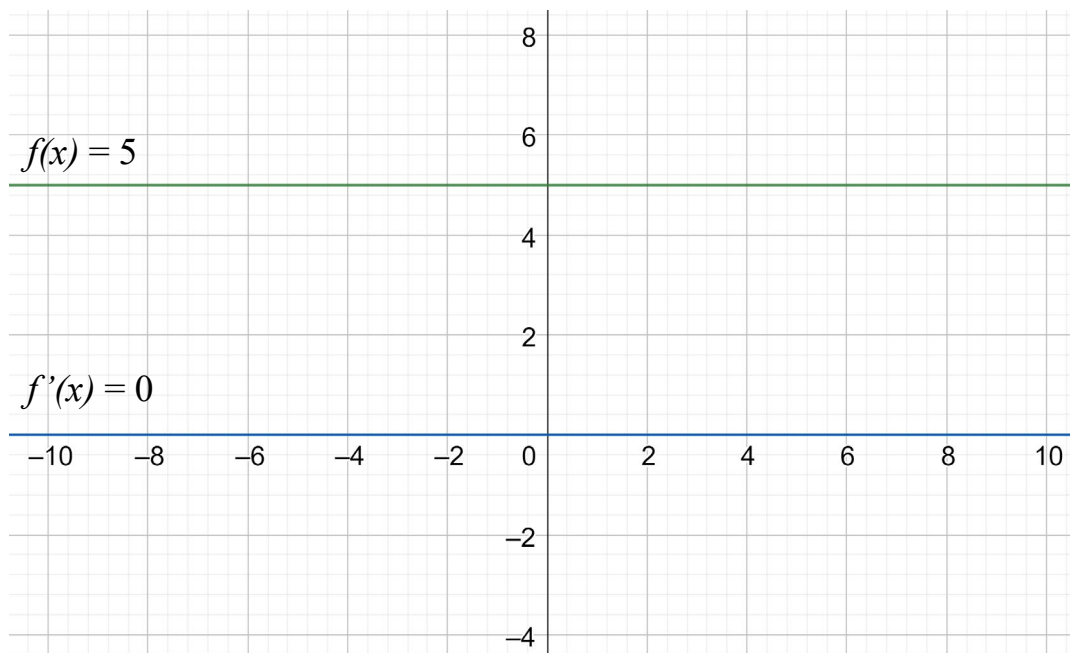


Afgeleiden – Afgeleiden van basisfuncties

- Constante functie:

$$f(x) = C \rightarrow f'(x) = 0$$

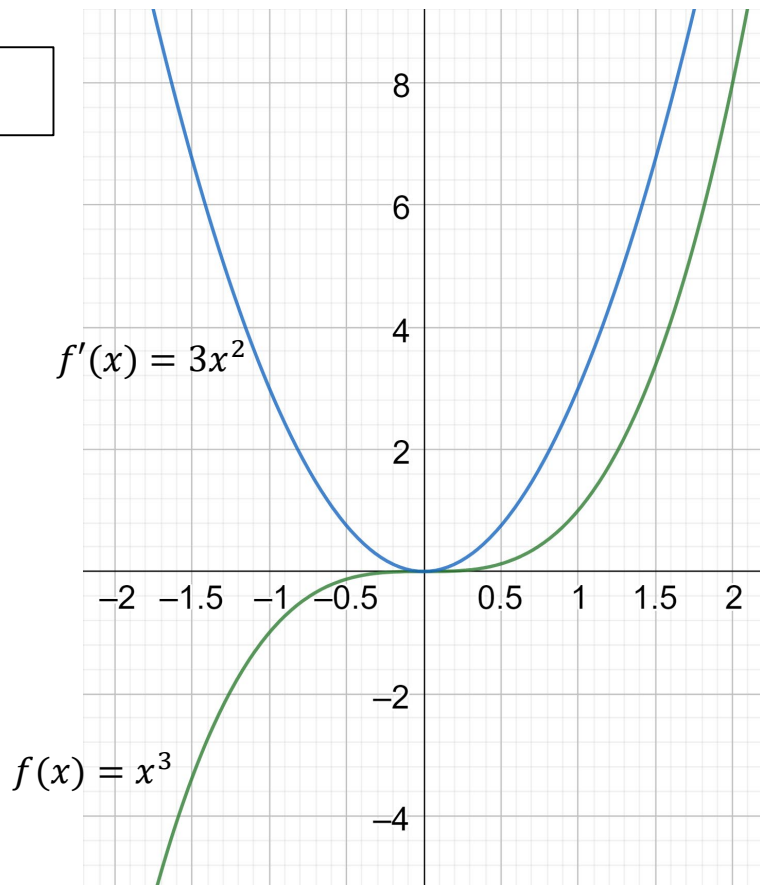
Bij een constante functie verandert de functiewaarde inderdaad niet als x verandert.



Afgeleiden – Afgeleiden van basisfuncties

- Machtsfuncties van x :

$$f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}.$$



Afgeleiden – Afgeleiden van basisfuncties

- Machtsfuncties van x :

$$f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}.$$

- Bijv. $f(x) = x^2 \rightarrow f'(x) = 2 \cdot x^{2-1} = 2x$
- Bijv. $f(x) = x^3 \rightarrow f'(x) = 3 \cdot x^{3-1} = 3x^2$
- Bijv. $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \rightarrow f'(x) = (-1) \cdot x^{(-1-1)} = -\frac{1}{x^2}$
- Bijv. $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{\left(\frac{1}{2}-1\right)} = \frac{1}{2} \cdot x^{\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

De voorgaande formules zijn bijzondere gevallen van deze formule

- $f(x) = x = x^1 \rightarrow f'(x) = 1 \cdot x^{(1-1)} = 1 \cdot x^0 = 1 \cdot 1 = 1$
- $f(x) = 1 = x^0 \rightarrow f'(x) = 0 \cdot x^{(0-1)} = 0 \cdot x^{-1} = 0$

Afgeleiden – Afgeleiden van basisfuncties

- Exponentiële functie met grondtal e : $f(x) = e^x \rightarrow f'(x) = e^x$

De functie e^x heeft dus zichzelf als afgeleide. Deze unieke eigenschap is in essentie de reden waarom men voor exponentiële functies het grondtal e verkiest.

Afgeleiden – Afgeleiden van basisfuncties

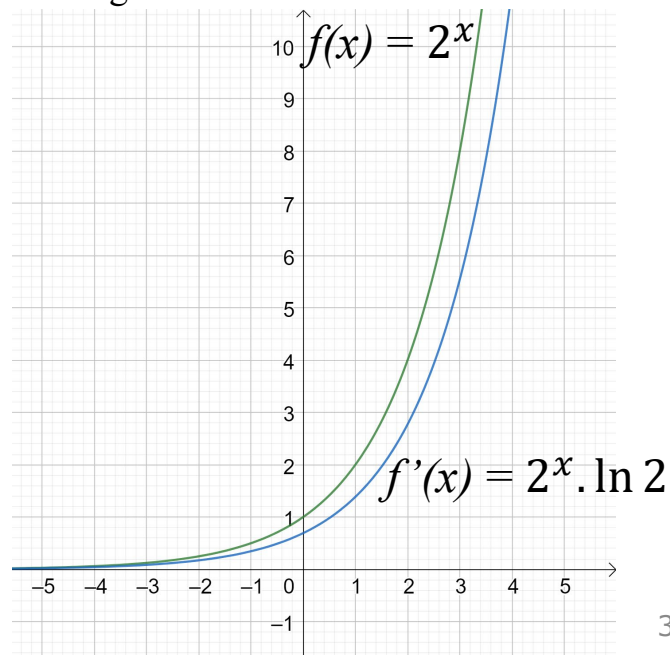
- Exponentiële functies met andere grondtallen:

$$f(x) = a^x \rightarrow f'(x) = a^x \cdot \ln a$$

Bijv.: $f(x) = 2^x \rightarrow f'(x) = 2^x \cdot \ln 2$

In het bijzondere geval dat het grondtal e is, vind je de vorige formule terug:

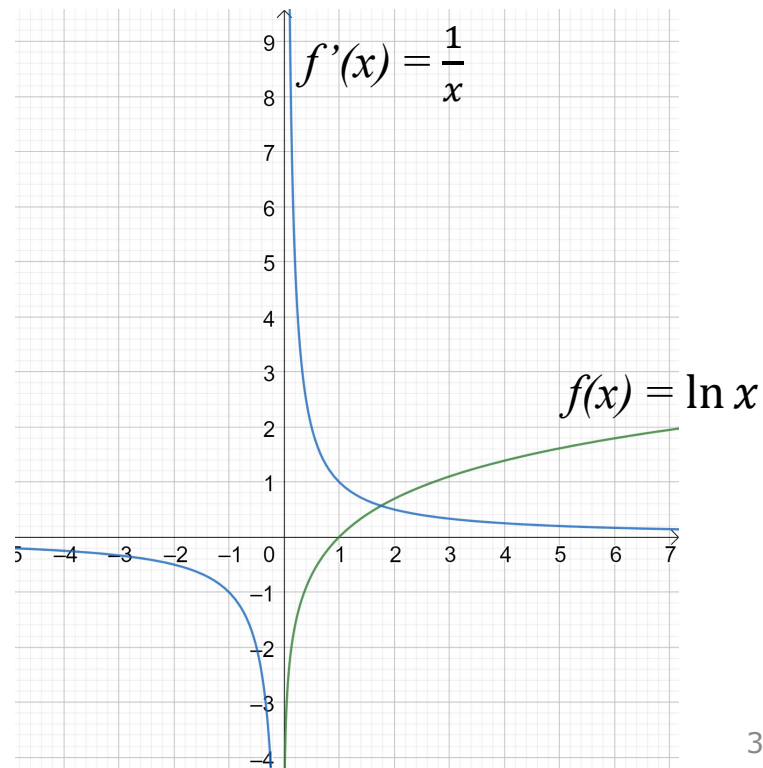
$$f(x) = e^x \rightarrow f'(x) = e^x \cdot \ln e = e^x \cdot 1 = e^x$$



Afgeleiden – Afgeleiden van basisfuncties

- Logaritmische functie met grondtal e :

$$f(x) = \ln x \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$$



Afgeleiden – Afgeleiden van basisfuncties

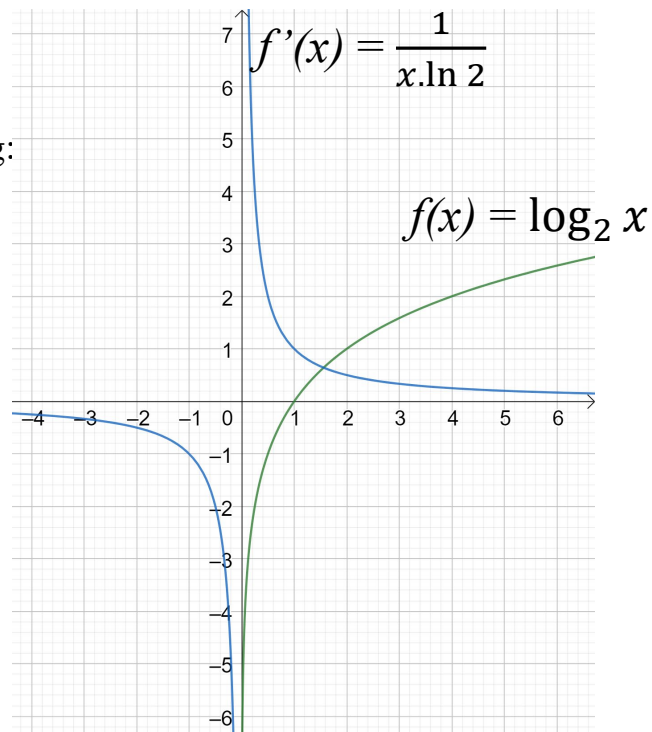
- Logaritmische functies met andere grondtallen:

$$f(x) = \log_a x \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

Bijv.: $f(x) = \log_2 x \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln 2}$

In het bijzondere geval dat het grondtal e is, vind je de vorige formule terug:

$$f(x) = \log_e x = \ln x \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln e} = \frac{1}{x \cdot 1} = \frac{1}{x}$$



Afgeleiden – Afgeleiden van basisfuncties

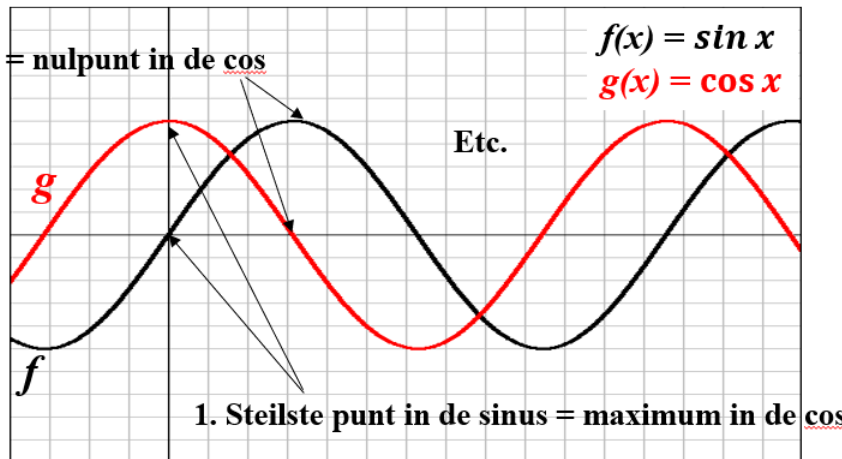
- De sinus- en cosinusfuncties :

$$f(x) = \sin x \rightarrow f'(x) = \cos x$$

$$f(x) = \cos x \rightarrow f'(x) = -\sin x$$

Dit kan je kwalitatief (intuïtief) begrijpen op basis van de grafieken:

2. Maximum in de sinus = nulpunt in de cos



Afgeleiden – Basisregels voor afgeleiden

- Somregel:

$$[f \pm g]' = f' \pm g'$$

Bijv.: $[x + x^2]' = [x]' + [x^2]' = 1 + 2x$

- Factorregel:

$$[k \cdot f]' = k \cdot f' \quad (k = \text{constante factor})$$

Bijv.: $[3x^2]' = 3 \cdot [x^2]' = 3 \cdot 2x = 6x$

- Productregel:

$$[f \cdot g]' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

Bijv.: $[x^2 \cdot \sin(x)]' = [x^2]' \cdot \sin(x) + x^2 \cdot [\sin(x)]'$
 $= 2x \cdot \sin(x) + x^2 \cdot \cos(x)$

- Quotiëntregel:

$$\left[\frac{f}{g}\right]' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

Bijv.: $\left[\frac{x^2}{x^2+1}\right]' = \frac{[x^2]' \cdot (x^2+1) - x^2 \cdot [x^2+1]'}{(x^2+1)^2}$

$$= \frac{2x \cdot (x^2+1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

Afgeleiden – Afgeleiden van basisfuncties

$$f(x) = 3x^3 - 4x^2 + 3$$

Voor een veeltermfunctie:

1. Vermenigvuldig elke coëfficiënt van x met de macht van x

$$3 \cdot 3x^3 - 2 \cdot 4x^2 + 0 \cdot 3$$

2. Trek van elke exponent 1 af

$$3 \cdot 3x^{3-1} - 2 \cdot 4x^{2-1} + 0 \cdot 3$$

3. De afgeleide functie wordt dan:

$$f'(x) = 9x^2 - 8x$$

Met deze functie $f'(x)$ kunnen we dus voor iedere x van $f(x)$ de rico van de raaklijn gaan uitrekenen.

4. De afgeleide in het punt (0,3) kan je dan vinden door de x in te vullen in $f'(x)$

$$f'(x) = 9 \cdot 0^2 - 8 \cdot 0 = 0$$

Afgeleiden – Basisregels voor afgeleiden

- Kettingregel:

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Alternatieve notatie

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx}$$

- Voorbeeld 1:

$$[\sin(x^2)]' = ?$$

$$f(x) = \sin(x^2)$$

$$g = x^2$$

$$f(g) = \sin(g)$$

→

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx} = \cos(g) \cdot 2x = \cos(x^2) \cdot 2x$$

Afgeleiden – Basisregels voor afgeleiden

Go to www.menti.com and use the code **14 12 14**

Voorbeeld 2: $[(\sin(x))^2]' = ?$

a) $2 \cdot \sin(x) \cdot \sin(x)$

b) $2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$

c) $2 \cdot \cos(x) \cdot \cos(x)$

Welke oplossing is juist?

0	0	0
a	b	c

Show correct answer



Slide is not active

Activate

0

Afgeleiden – Basisregels voor afgeleiden

Go to www.menti.com and use the code **14 12 14**

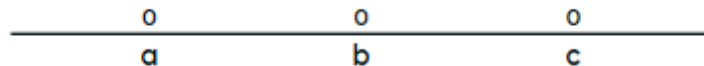
Voorbeeld 3: $\left[\frac{\ln(x)}{3x^2+x} \right]' = ?$

Welke oplossing is juist?

a) $\frac{3x+1-(6x+1).\ln(x)}{(3x^2+x)^2}$

b) $\frac{3x+1-(6x+1).\ln(x)}{3x^2+x}$

c) $\frac{-(6x+1).\ln(x)}{(3x^2+x)^2}$



Show correct answer



Slide is not active

Activate



Afgeleiden – Basisregels voor afgeleiden

Go to www.menti.com and use the code **14 12 14**

Voorbeeld 4: $\left[-2 \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x^3}\right]' = ?$

Welke oplossing is juist?

a) $\frac{14}{3\sqrt[3]{x^{10}}}$

b) $\frac{7}{3\sqrt[3]{x^{10}}}$

c) $\frac{14}{\sqrt[3]{x^{10}}}$

o o o
a b c

Show correct answer



Slide is not active

Activate

 0

